

GUÍA DE EJERCICIOS

1. El conocido animador Jugo César (JC) es un opinólogo experto en todo (incluido el bosón de Higgs) y ha sido contratado por un canal de TV para participar en un programa cuya duración es de H horas. En este programa, de acuerdo con el contrato, debe lanzar al menos I ideas, las que son o geniales o malas. Las ideas llegan (misteriosamente) a JC de acuerdo con un PPH $N(t)$ de tasa $\lambda > 0$ (ideas/hora) y se sabe que cada una de ellas, independientemente de las demás, es genial con probabilidad p_g o mala con probabilidad p_m ($p_g + p_m = 1$). Se sabe también que una idea genial hace que el rating del programa llegue al nivel óptimo (100) pero una idea mala lo hace caer a nivel calamitoso (0). El rating es un proceso continuo que vale 100 mientras JC está desarrollando una idea genial y vale 0 cuando está dando jugo (expresión coloquial que representa el desarrollo de una mala idea). Su valor inicial es 0.
 - a) Calcule la probabilidad de que la primera idea sea genial, sabiendo que JC cumplió el contrato.
 - b) Calcule la probabilidad de JC cumpla con su contrato.
 - c) Calcule la probabilidad de que más del 50 % de las ideas planteadas por JC sean geniales, sabiendo que cumplió estrictamente con el contrato en el sentido que lanzó exactamente I ideas.
 - d) Calcule la probabilidad del suceso anterior pero sin que se sepa si ha cumplido el contrato.
 - e) JC recibe un bono si cumple con el contrato y lanza a lo más una idea mala. Calcule la probabilidad de que reciba el bono.
 - f) Calcule la probabilidad de que el rating se mantenga en nivel óptimo durante todo el programa, sabiendo que no cumplió el contrato, pero tuvo al menos una idea.
 - g) Calcule el rating por hora esperado del programa (reflexionar y proponer algún análisis).

SOLUCION: Las respuestas se dejan expresadas cuando no es posible dar una fórmula cerrada.

- a) Designamos por X_1^g el instante de aparición de la primera idea genial y por X_1^m el correspondiente a una mala idea. Notar que el suceso “a JC solo se le ocurre una idea” equivale a $\{N(H) \geq I\}$. Calculamos entonces $P[X_1^g < X_1^m | N(H) \geq I]$. Esto debería ser simplemente p_g ya que la primera idea es genial, independientemente de las demás, con probabilidad p_g . Para comprobarlo calculamos

$$P[X_1^g < X_1^m | N(H) \geq I] = \frac{P[X_1^g < X_1^m, N(H) \geq I]}{P[N(H) \geq I]} = \frac{\sum_{i=I}^{\infty} P[X_1^g < X_1^m | N(H) = i] P[N(H) = i]}{P[N(H) \geq I]}.$$

Es claro que $P[X_1^g < X_1^m | N(H) = i] = p_g$ puesto que los i instantes de llegada del proceso $N(t)$ son seleccionados independientemente para ser genial o malo. El resultado se obtiene al cancelar $P[N(H) \geq I]$ en numerador y denominador.

- b) El contrato se cumple si JC lanza al menos I ideas (buenas o malas) en las H horas del programa. Esto tiene probabilidad

$$P[N(H) \geq I] = \sum_{k=I}^{\infty} \frac{e^{-\lambda H} (\lambda H)^k}{k!}.$$

- c) Sean N_g, N_m los procesos de Poisson (independientes) de las ideas geniales y malas. Entonces se pide calcular

$$P[N_g(H) > N_m(H) | N(H) = I] = P[N_g(H) > I/2 | N(H) = I] = \sum_{I/2 < i \leq I} \binom{I}{i} p_g^i p_m^{I-i}.$$

Este resultado viene de que N_g condicional en N es binomial.

- d) En este caso se pide calcular $P[N_g(H) > N_m(H)]$. Condicionamos, por ejemplo en N_g y usamos la independencia entre N_g y N_m :

$$P[N_g(H) > N_m(H)] = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} P[N_m(H) = k] [N_g(H) = n].$$

- e) JC recibe un bono si $N(H) \geq I$ y $N_m(H) \leq 1$. Calculamos entonces

$$P[N(H) \geq I, N_m(H) \leq 1] = P[N(H) \geq I, N_m(H) = 0] + P[N(H) \geq I, N_m(H) = 1].$$

Pero

$$P[N(H) \geq I, N_m(H) = 0] = P[N_g(H) \geq I, N_m(H) = 0] = P[N_g(H) \geq I] P[N_m(H) = 0]$$

y estas dos últimas probabilidades se calculan sabiendo que $N_g(H)$ es Poisson λp_g y $N_m(H)$ es Poisson λp_m . Análogamente

$$P[N(H) \geq I, N_m(H) = 1] = P[N_g(H) \geq I-1, N_m(H) = 1] = P[N_g(H) \geq I-1] P[N_m(H) = 1].$$

- f) Aquí se pide calcular $P[N_m(H) = 0 | 1 \leq N(H) < I]$. Tenemos

$$P[N_m(H) = 0 | 1 \leq N(H) < I] = \frac{P[N_m(H) = 0, 1 \leq N_g(H) < I]}{P[1 \leq N(H) < I]} = \frac{P[N_m(H) = 0] P[1 \leq N_g(H) < I]}{P[1 \leq N(H) < I]}.$$

Las probabilidades del numerador y denominador se calculan usando la fórmula de Poisson en cada caso.

- g) Notar que el proceso de rating $R(t)$ vale 0 hasta que se produce la primera idea genial. Esto dura un tiempo exponencial de parámetro λp_g . A partir de ese momento $R(t) = 100$ hasta que aparece una idea mala, lo que ocurre después de un tiempo exponencial de parámetro λp_m . De ahí en adelante $R(t) = 0$ hasta la proxima idea genial, la que llega luego de un tiempo exponencial de parámetro λp_g , etc. Entonces, básicamente hay que ver cuantos de estos bloques de exponenciales cuyos parámetros alternan, caben en $[0, H]$ y multiplicar por 100 y el largo esperado de la parte genial del bloque, que es $1/\lambda p_m$.